Formelsamling

Johan Mauritsson

July 2021

Integraler och identiteter

Några integraler

Obestämda integraler

$$\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b|$$

$$\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|$$

$$\int \frac{ax+b}{fx+g}dx = \frac{ax}{f} + \frac{bf-ag}{f^2}\ln|fx+g|$$

$$\int \frac{x}{(ax+b)(fx+g)}dx = \frac{1}{bf-ag}\left[\frac{b}{a}\ln|ax+b| - \frac{g}{f}\ln|fx+g|\right]$$

$$\text{Definition:}\quad \chi = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & \text{if } 4ac > b^2 \\ \frac{1}{a(p-q)}\ln\left|\frac{x-p}{x-q}\right| & \text{if } 4ac < b^2 \end{cases}$$

Där p och q är rötterna till $ax^2+bx+c=0$.

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \chi$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\chi$$

$$\int \frac{x^2}{ax^2+bx+c}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\chi$$

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^2}dx = \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2a}{(4ac-b^2)}\chi$$

$$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^2}dx = -\frac{bx+2c}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} - \frac{b}{(4ac-b^2)}\chi$$

$$\int \sqrt{ax+b}dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}$$

$$\int x\sqrt{ax+b}dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}(ax+b)^{3/2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\int \frac{1}{\sin ax}dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{1}{\cos ax}dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax|$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|$$

$$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x$$

$$\int x\sin^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln|x| - x$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

Bestämda integraler

$$\int_0^\infty x^{2n}\cdot e^{-ax^2}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Där $a > 0$, $n! =$ negativt heltal.

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\cdot e^{-ax^2}\,dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty x^k\cdot e^{-ax}\,dx = \Gamma(k+1)\cdot a^{-(k+1)}$$

$$I_k = \int_0^\infty \frac{x^k}{e^x-1}\,dx = \Gamma(k+1)\cdot\zeta(k+1)$$

$$J_k = \int_0^\infty \frac{x^k}{e^x+1}\,dx = (1-2^{-k})\cdot I_k$$

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1}x\cdot\cos^{2b+1}x\,dx = \frac{\Gamma(a+1)\cdot\Gamma(b+1)}{2\Gamma(a+b+2)}$$

Stirlings formel

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \qquad N \gg 1$$

Felfunktionen

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi$$

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi$$

$$\mathrm{erf}(\infty) = 1$$

Potensserier

Potensserier

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...$$

$$\sin(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - ...$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - ...$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15!}x^5 + ...|x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\ln(1+x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...|x| < 1$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + ...$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + ...$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + ...$$

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - ...|x| < 1$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + ...|x| < 1$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ...$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...$$

Trigonometiska funktioner

Trigonometiska funktioner

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$$

$$\sin\alpha + \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin\alpha - \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

Hyperboliska funktioner

Hyperboliska funktioner

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Vektoranalys

Vektoranalys

Vektorprodukter

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

där $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ är enhetsvektorer.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c})$$

Gradient, divergens, rotation och Laplaceoperatorn

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta a_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \nabla\times\boldsymbol{a} &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\\
&= \left(\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta a_\varphi)-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right),\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi),\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}$$

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rf), \quad r\neq 0$$

$$\begin{gathered}
\nabla\times(\nabla\mathcal{U}) = 0\\
\nabla\cdot(\nabla\mathcal{U}) = \nabla\mathcal{U}\\
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0\\
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}\\
\nabla\cdot(\mathcal{U}V) = \mathcal{U}\Delta V+2\nabla\mathcal{U}\cdot\nabla V+V\Delta\mathcal{U}\\
\nabla\cdot(\mathcal{U}\boldsymbol{V}) = \mathcal{U}\Delta\boldsymbol{V}+2(\nabla\mathcal{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}\Delta\mathcal{U}\\
\nabla\times(\mathcal{U}\boldsymbol{V}) = \mathcal{U}\nabla\times\boldsymbol{V}+(\nabla\mathcal{U})\times\boldsymbol{V}\\
\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\\
\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\\
\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})
\end{gathered}$$

Gauss sats

$$\oint_{S(V)}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{a})dV$$

Där dV i polära koordinater är $r^2\sin\theta\; dr\; d\theta\; d\varphi$

Stokes sats

$$\oint_{C(S)}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{S}$$

Där S är en godtycklig yta som begränsas av $C(S)$

Greens sats

$$\oint_{S(V)}(\Psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\Psi)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V(\Psi\Delta\varphi-\varphi\Delta\Psi)dV$$

Elektromagnetisk fältteori

elstatik

Coulumbs law

F på en punktladdning q_1 i punkten $\mathbf{r_1}$ orsakad av en punktladdning q_2 i punkten $\mathbf{r_2}$

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |r_1 - r_2|^2} \frac{(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|}$$

Elektrisk fältstyrka

Från en punktladdning q i $\boldsymbol{r'}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R$$

Från laddningsfördelning

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R dq(\boldsymbol{r'}),$$

$$dq(\boldsymbol{r'}) = \begin{cases} \rho_{tot}(\boldsymbol{r'})dv' = \rho(\boldsymbol{r'}) + \rho_p(\boldsymbol{r'}))dv' \\ \rho_{tot,s}(\boldsymbol{r'})dS' = \rho_s(\boldsymbol{r'}) + \rho_{p,s}(\boldsymbol{r'}))dS' \\ \rho_l(\boldsymbol{r'})dl' \end{cases}$$

Från punktdipol $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos(\theta)\boldsymbol{e}_r + \sin(\theta)\boldsymbol{e}_\theta)$$

ρ_l

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r_c}\boldsymbol{e}_{r_c}$$

Från linjedipol $\boldsymbol{p}_l = p_l\boldsymbol{e}_x$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0 r_c^2}(\cos(\varphi)\boldsymbol{e}_{r_c} + \sin(\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi)$$

Elektrisk potential

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

Från punktladdning q i $\boldsymbol{r'}$

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Från laddningsfördelning

$$V(\boldsymbol{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} dq(\boldsymbol{r}')$$

Från punktdipol $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e}_z$

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Från linjeladdning ρ_l

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{1}{r_c}\right)$$

Från linjedipol $\boldsymbol{p}_l = p_l\boldsymbol{e}_x$

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0}\frac{\cos(\varphi)}{r_c}$$

Elektrisk flödestäthet

Där $\boldsymbol{D}$ är definerad av $\boldsymbol{\nabla D} = \rho$

Gauss lag, där $\boldsymbol{e}_n$ är den från volymen utåtriktade enhetsnormalvektorn]:

$$\oint \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}_n\, dS = \int \rho\, dv$$

[[Connection between $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{D}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} & \text{(gäller almänt)} \\ \boldsymbol{D} = \epsilon_r\epsilon_0\boldsymbol{E} \end{cases}$$

Polarisationsladdning

$$\rho_p = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P} \qquad \text{rymdladdningstäthet}$$

$$\rho_{p,s} = \boldsymbol{e}_{n1}\cdot(\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2) \qquad \text{ytladdningstäthet}$$

där enhetsnormalvektorn $\boldsymbol{e}_{n1}$ är riktad från område 1 till område 2.

Randvillkor

$$\begin{cases} E_t \text{ kontinuerlig} \\ \rho_s = \boldsymbol{e}_{n2}\cdot(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \end{cases}$$

där ρ_s är fri ytladdningstäthet och $\boldsymbol{e}_{n2}$ är riktad från område 2 mot område 1.

Elektrostatisk energi

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho V \, dv$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \, dv$$

Maxwells spänning

$$|\boldsymbol{T}| = \frac{1}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \qquad \boldsymbol{E} \text{ är en bisektris till } \boldsymbol{e}_n \text{ och } \boldsymbol{T}$$

Vridmoment på elektrisk dipol

$$\boldsymbol{T}_e = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

Likström

Strömtäthet

$$I = \int \boldsymbol{J} \cdot e_n \, dS$$

Konservationsekvationen

$$\boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{e}_n \, dS = -\frac{dQ}{dt}$$

Konduktivitet

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

Effekt

$$P = \int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \, dv$$

Randvillkor

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{n2} \cdot (\boldsymbol{J}_1 - \boldsymbol{J}_2) = 0 \quad \text{(ingen likström)} \\ \boldsymbol{E}_{t1} = \boldsymbol{E}_{t2} \end{cases}$$

Tidskonstant

$$RC = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\sigma}$$

Analogi elstatik-likström

$\boldsymbol{E}, V$	$\boldsymbol{E}, V$
$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{J}$
$\epsilon_r \epsilon_0$	σ
Q	I
C	G

Magnetostatik

Magnetisk flödestäthet

Från punktdipol $\boldsymbol{m} = m\boldsymbol{e}_z$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta \boldsymbol{e}_r + \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta)$$

Från strömtäthet $\boldsymbol{J}_{tot}(\boldsymbol{r}')$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}_{tot}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}\, dv'$$

där $\boldsymbol{J}_{tot} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_m$. Från strömbana:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

Från circulär trådslinga:

$$\boldsymbol{B}(x = 0, y = 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z$$

Från spole:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 N I}{\ell}\frac{\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)}{2}\boldsymbol{e}_z$$

Från lång rak strömbana:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c}\boldsymbol{e}_\varphi$$

Vektorpotential

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

Från strömtäthet $\boldsymbol{J}_{tot}(\boldsymbol{r}')$:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}_{tot}(\boldsymbol{r}')}{R}\, dv'$$

Från strömbana:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\, d\boldsymbol{l}'}{R}$$

Från lång rak strömbana:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \boldsymbol{e}_z$$

Från punktdipol :

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Magnetiskt flöde

$$\Phi = \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{e}_n\, dS = \oint \boldsymbol{A} \cdot dl$$

Sammanlänkat flöde

$$\Lambda = N\Phi$$

Självinduktansoch ömsesidig induktans

$$\Lambda_1 = L_1 I_1 + M I_2$$
$$\Lambda_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

Magnetisk Fältstyrka

Amperes lag:

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\ell = \int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{e}_n\, dS = I_{\text{innanför}}$$

Samband mellan magnetisering $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{H}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \quad \text{(gäller allmänt)} \\ \boldsymbol{B} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H} \end{cases}$$

Ekvivalent strömtäthet

$$\boldsymbol{J}_m = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} \qquad \text{volymströmtäthet}$$

$$\boldsymbol{J}_m = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} \qquad \text{ytströmtäthet}$$

Randvillkor

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{n2} \times (\boldsymbol{H}_1 - H_2) = \boldsymbol{J}_s \\ \boldsymbol{B}_n \text{ Kontinuerlig} \end{cases}$$

Skalärpotential

Från en magnetisk dipol $\boldsymbol{m}$:

$$V_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

Magnetisk poltäthet

$$\begin{cases} \rho_m = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{M} & \text{volympoltäthet} \\ \rho_{m,s} = e_{n1} \cdot (\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2) & \text{ytpoltäthet} \end{cases}$$

Magnetiska kraftlagen

$$d\boldsymbol{F}_m = I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

Magnetiskt moment för strömslinga

$$\boldsymbol{m} = \int I \boldsymbol{e}_n \, dS$$

Vridmoment på magnetiskt moment

$$\boldsymbol{T}_m = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$

Maxwells spänning

$$|\boldsymbol{T}| = \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} \qquad \boldsymbol{B} \text{ är bisektris till } \boldsymbol{e}_n \text{ och } \boldsymbol{T}$$

Magnetisk energi

$$W_m = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A} \, dv = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} \, dv = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij} I_i I_j$$

Två spolar:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

Reluktans

$$R = \frac{1}{\mu_r \mu_0 S}$$

Elektromagnetiska Fält

Inducerad emk

$$\mathcal{E} = \oint (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\ell$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Lambda}{dt} \quad \text{(spole med flera varv)}$$

Maxwells ekvationer

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot D = \rho$$

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{B} = 0$$

Konservationsekvationen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Potentialer

$$V(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} \, dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{ret}}{R} \, dv'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} \, dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}_{ret}}{R} \, dv'$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

Magnetisk flödestäthet

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}_{ret}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}\,dv' + \frac{\mu_0}{4\pi c}\int \frac{\boldsymbol{J}'_{ret}\times\boldsymbol{e}_R}{R}\,dv'$$

Trådformig antenn

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i(z,t-R/c)d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2} + \frac{\mu_0}{4\pi c}\int \frac{i(z,t-R/c)d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_R}{R}$$

Svängande elektrisk dipol

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{p}'(t-R/c)\times\boldsymbol{e}_R}{R^2} + \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\boldsymbol{p}''(t-R/c)\times\boldsymbol{e}_R}{R}$$

Svängande magnetisk dipol

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}'(t-R/c)\times\boldsymbol{e}_R}{R^2} - \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\boldsymbol{m}''(t-R/c)\times\boldsymbol{e}_R}{R}$$

Pointings vektor

$$\boldsymbol{P}_S(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$$

Tidsharmoniska fält

Plan, sinusformad våg

$$\boldsymbol{E} = \hat{E}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\phi)\boldsymbol{e}_E \quad \text{ögonblicksvärde}$$

$$\boldsymbol{E} = E_0 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{e}_E \quad \text{complex värde}$$

$$E_0 = \hat{E}e^{j\phi} \quad \text{topvärdesskala}$$

$$E_0 = \frac{\hat{E}}{\sqrt{2}}e^{j\phi} \quad \text{effektivvärdesskala}$$

Utbredningshastighet

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}} \quad v = \frac{\omega}{k} \quad k = |\boldsymbol{k}|$$

Vågimpedans, oledande rymd

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\epsilon_r\epsilon_0}}$$

Regeln om högersystem

$$\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_E \times \boldsymbol{e}_H \quad E = \eta H \qquad \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_E \times \boldsymbol{e}_B \quad E = vB$$

¡ Missing Translation ¿

$$\boldsymbol{E} = E_0 e^{\gamma z} \boldsymbol{e}_x$$

Komplexa utbredningskonstanten

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_r\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon_r\epsilon_0)} \qquad \gamma = \alpha j\beta$$

Vågimpedans, rymd med given conduktivitet

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_r\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_r\epsilon_0}}$$

Inträngningsdjup

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_r\mu_0\sigma}}$$

Några derivator

Några derivator

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Fourieranalys

Fourieranalys inledning

Fouriersumma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\omega t)$$

Fourierkoefficienter

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)dt$$

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)dt$$

Omskrivning med hjälp av Eulers formel

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_n e^{-im\omega t}$$

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{im\omega t}dt$$

För icke-periodiska funktioner gäller

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$$

Fouriers integralsats

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} A(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k$$

$$A(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d^3r$$

Periodiska randvilkor

Om funktionen $f(\boldsymbol{r})$ är sådan att

$$f(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r} + L\boldsymbol{R})$$

[For some positive integer L and lattice vector $\boldsymbol{R}$. Then/Får något positivt heltal L och gittervektor $\boldsymbol{R}$. Då håller att]]

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{G}}{L}} c_{\boldsymbol{k}}\cdot e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$c_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_V f(\boldsymbol{r})\cdot e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d^3r$$

Där $\boldsymbol{G}$ är den reciproka gittervektorn och $V = L^3|\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)| = L^3 V_a$. Funktionerna $\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ är ett fullständigt orthonormalsystem i V.. Om volymen V är stor, kan summan ersättas med en integral:

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

Diracs deltafunktion

$$\int_A^B f(x)\delta(x - x_0)\, dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{om } A < x_0 < B \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Om $f(x)$ är en ”snäll” funktion.

$$\delta(f(x)) = \sum_{\forall i; f(x_i)=0, f'(x_i)\neq 0} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)}\, dk$$

Kroneckers delta

$$\delta_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\phi(n-m)}\, d\phi = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Mekanik

Mekanik

Momentanhastighet

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Momentanacceleration

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Rörelsemängd

$$\mathbf{p} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}$$

Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \cdot \mathbf{a}$$

Gravitation

$$F = C \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Centripetalacceleration

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Arbete

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

Kinetisk energi

$$K = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Potentiell energi

$$W = -\Delta U,\; F = -\frac{dU}{dx}$$

Reducerad massa

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$$

Vinkelfrekvens

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Kvantmekanik

Kvantmekanik

Schrödinger ekvationen

$$H\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \mathcal{U}(\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r},t)$$

Där H är en hamiltonoperator. Om H är tidsoberoende ger separation av variabler:

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \mathcal{U}(\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}) = E\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$$

Den generella tidsberoende lösningen är:

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r},t) = \sum_n a_n \cdot \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

Där a_n bestäms ur randvillkoren ($t = 0$):

$$a_n = \int \boldsymbol{\Phi}_n * (\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r}, t = 0)\, d^3r$$

Operatorer

Linjär operator

$$F(a\boldsymbol{\Phi}_1 + b\boldsymbol{\Phi}_2) = a \cdot F\boldsymbol{\Phi}_1 + b \cdot F\boldsymbol{\Phi}_2 \quad \forall \boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2$$

Egenvärde, egenfunktion

$$Fu_n = f_n u_n$$

u_n är en egenfunktion till operatorn F och motsvarande egenvärde är f_n.

Hermitsk operator

$$\int (Hu) * v\, d^3r = \int u * Hv\, d^3r, \quad \forall u, v$$

En hermitsk operator har reella egenvärden och motsvarande egenfunktioner kan väljas orthonroamla. Praktiskt taget alla peratorer i kvantmekaniken är linjära och hermitska.

Utveckling i egenfunktioner

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r}) = \sum_n a_n m \cdot u_n(\boldsymbol{r}), \quad a_n = \int u_n * \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot d^3r$$

Utvecklingspostulatet

Vid en mätning av en observabel F på ett system beskrivet av en vågfunktion $\boldsymbol{\psi}$ kan man endast erhålla egenvärden till operatorn F. Sannolikheten för utfallet $F = f_n$ ges av

$$P(F = f_n) = \left| \int u_n * \boldsymbol{\psi}\, d^3r \right|^2, \quad Fu_n = f_n u_n$$

Rörelsemängdsoperatorer

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right]$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

L^2 och L_z har normerade egenfunktioner $\Upsilon_l^m(\theta,\varphi)$ för vilket det gäller att:

$$L^2 \Upsilon_l^m = \hbar^2 l(l+1) \Upsilon_l^m$$

$$L_z \Upsilon_l^m = m\hbar \Upsilon_l^m$$

l	m	$\Upsilon_l^m(\theta,\varphi)$
0	0	$\Upsilon_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$\Upsilon_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
1	± 1	$\Upsilon_1^{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$
2	0	$\Upsilon_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(3\cos^2\theta - 1\right)$
2	± 1	$\Upsilon_2^{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$
2	± 2	$\Upsilon_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$

Kommutatorer och rörelsemängdsoperatorer

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk \text{ jämn} \\ -1 & ijk \text{ udda} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar \cdot \delta_{ij}$$

$$[x_i, L_j] = i\hbar \cdot \epsilon_{ijk} \cdot x_k$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar \cdot \epsilon_{ijk} \cdot L_k$$

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$$

$$[p_i, L_j] = i\hbar \cdot \epsilon_{ijk} \cdot p_k$$

$$J_+ = J_x + iJ_y$$
$$J_- = J_x - iJ_y$$

$$J_\pm J_\mp = J^2 - J_z^2 \pm \hbar \cdot J_z$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar \cdot J_z$$

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar \cdot J_\pm$$

$$J_+\phi_{j,m} = \sqrt{(j-m)(j+m+1} \cdot \hbar \cdot \phi_{j,m+1}$$

$$J_-\phi_{j,m} = \sqrt{(j+m)(j-m+1} \cdot \hbar \cdot \phi_{j,m-1}$$

$$\Upsilon_l^l(\theta, \varphi) = (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1)}{4\pi} \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}} \cdot \sin^l \theta \cdot e^{il\varphi}$$

Tillämpningar

0.0.1 Lågpotential med oändligt stela väggar i en dimension

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0,\ a \leq x \\ 0 & 0 < x < a \end{cases}$$

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \leq 0 \text{ och } a \leq x \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} & \text{för } 0 < x < a \end{cases}$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

Harmonisk oscillator 1D

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$N_n = (2^n n!)^{-1/2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

Hermites polynomial:

$$H_n(\xi) = (-1)^n \cdot e^{\xi^2} \cdot \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_n(x) = N_n \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \cdot H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$$

$$E_n = \hbar\omega \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Vågfunktionerna kan alternativt skrivas:

$$u_n(x) = N\left(\frac{\partial}{\partial x} - ax\right)^n \cdot u_0(x)$$
$$u_0(x) = e^{-ax^2/2}$$

Sfärisk symmetrisk potential

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{U}(r)$$

$$H = -\frac{\hbar}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{L^2}{2mr^2} + \mathcal{U}(r)$$

$$H\boldsymbol{\psi}_{nlm}(\boldsymbol{r}) = E_{nlm}\boldsymbol{\psi}_{nlm}(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{\psi}_{nlm}(\boldsymbol{r}) = \frac{G_{nl}(r)}{r}\Upsilon_l^m(\theta, \phi)$$

Radiella ekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}G(r) + \left[\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + \mathcal{U}(r)\right]G(r) = EG(r)$$

Väteliknande atom

$$\mathcal{U}(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Schrödingerekvationen blir:

$$\left[\Delta + \frac{2Z}{a_0 r} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right]\mathbf{\Phi}(r) = 0$$

Radiella vågfunktioner för väteliknande atomer:

n	l	$R_{nl}(r)$
1	0	$R_{10}(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\rho/2}$
2	0	$R_{20}(r) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}(2-\rho)e^{-\rho/2}$
2	1	$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho e^{-\rho/2}$
3	0	$R_{30}(r) = \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(6-6\rho+\rho^2\right)e^{-\rho/2}$
3	1	$R_{31}(r) = \frac{1}{9\sqrt{6}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho(4-\rho)e^{-\rho/2}$
3	2	$R_{32}(r) = \frac{1}{9\sqrt{30}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho^2 e^{-\rho/2}$

$$E-n = -\frac{mZ^2e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2} = -\frac{Z^2\hbar^2}{2a_0^2mn^2} = -13.6\frac{Z^2}{n^2}\mathrm{eV}$$

$$S(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\left[\boldsymbol{\psi}^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x} - \boldsymbol{\psi}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\psi}^*\right]$$

Störningsräkning

Tidsoberoende störning:

$$\left.\begin{array}{l}\left(H^0+H'\right)\boldsymbol{\psi}'_m = E'_m\boldsymbol{\psi}'_m\\ H^0\boldsymbol{\psi}_n = E_n^0\boldsymbol{\psi}_n\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$E'_m = E_m^0 + \langle m|H'|m\rangle + \sum_{n\neq m}\frac{|\langle m|H'|n\rangle|^2}{E_m^0 - E_n^0}$$

$$\boldsymbol{\psi}'_m = \boldsymbol{\psi}_m + \sum_{n\neq m}\frac{\int\boldsymbol{\psi}_n^* H'\boldsymbol{\psi}_m\,d^3r}{E_m^0-E_n^0}\boldsymbol{\psi}_n$$

Tidsberoende störning:

$$\left.\begin{array}{l} H = H^0 + H' \\ H^0 \text{ Tidsoberoende} \\ H^0\boldsymbol{\psi}_n = E_n^0\boldsymbol{\psi}_n \\ H\boldsymbol{\psi}' = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi}' \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{\psi}'_m = \sum_n a_{mn}(t)\boldsymbol{\psi}_n$$

$$\dot{a}_{mn} = -\frac{i}{\hbar}e^{-i(E_m-E_n)t/\hbar} \cdot H'_{nm}$$

"Golden Rule"

övergångs sannolikheten per tidsenhet $w_{f\leftarrow i}$ för en övergång från tillståndet $\boldsymbol{\psi}_i$ till en grupp av tillstånd $F = \{\boldsymbol{\psi}_f\}$ med energin $\sin E_i^0$ för ett system karaktäriserat av tillståndstätheten $\rho(E)$ ges av:

$$w_{f\leftarrow i} = \frac{2\pi}{\hbar}|\left\langle f|H'|i\right\rangle|^2_{E_i^0\approx E_f^0} \cdot \rho(E_f^0)$$

Spridning (Born approximationen)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\xi,\eta)|^2$$

$$f(\xi,\eta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)\cdot\boldsymbol{r}} \cdot v(\boldsymbol{r})\, d^3r$$

För sfäriskt symmetrisk potential:

$$f(\xi,\eta) = \frac{2m}{\hbar^2 K}\int_0^\infty \sin(Kr)\cdot r\cdot v(r)dr, \qquad |K| = 2k\cdot\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Sfärisk lådpotential:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$$f(\xi,\eta) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\cdot\frac{\sin(Ka) - Ka\cos(Ka)}{K^3}$$

Skärmad coulombpotential:

$$v(r) = -\frac{A}{r}\cdot e^{-\alpha r}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2mA}{\hbar^2\left(\alpha^2 + 4k^2\sin^2(\xi/2)\right)}\right)^2$$

$$\sigma = \left(\frac{Am}{\hbar^2}\right)^2 \frac{16\pi}{\alpha^2 \left(\alpha^2 + 4k^2\right)}$$

$$\text{När } \alpha \to 0, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \to \left(\frac{Am}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{4\left(k\sin(\xi/2)\right)^4}$$

Periodisk potential

$$V(x) = \left.\begin{matrix} 0 & n(a+b) < x < n(a+b) + a \\ V_0 & n(a+b) + a < x < (n+1)(a+b) \end{matrix}\right\}$$

Kontinuitetskrav:

$$\cos k_1 a \cdot \cos k_2 b - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin k_1 a \cdot \sin k_2 b = \cos(k(a+b)), \quad V_0 < E$$

$$\cos k_1 a \cdot \cosh \kappa b - \frac{k_1^2 + \kappa^2}{2k_1 \kappa} \sin k_1 a \cdot \sinh \kappa b = \cos(k(a+b)), \quad V_0 < E$$

Fas- och grupp hastighet:

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}$$

Effektiva massan:

$$m^* = \left(\frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E}{dk^2}\right)^{-1}$$

Atomfysik

Atomfysik

DeBroglievåglängden

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Rydberg

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) Z^2$$

$$E_n = -hcR\frac{Z^2}{n^2}$$

$$hcR_\infty = \frac{m_e(e^2/4\pi\epsilon_0)^2}{2\hbar^2} = 13.606 \text{ eV}$$

$$R = R_\infty \cdot \frac{M_N}{m_e + M_N}$$

Alkalilika system

$$n^* = n - \delta_l$$

$$E = -hcR_\infty \frac{Z_0^2}{n^{*2}}$$

$$\Delta E_{FS} = -\frac{Z_i^2 Z_0^2}{n^{*3} l(l+1)} \alpha^2 hcR_\infty$$

Vätelika atomer

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze_0^2}{r}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$$

I bohrs atommodell: $r_n = a_0 n^2/Z$

Radialfunktioner för vätelika system

$$R_{1,0} = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} 2e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{2,0} = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} 2\left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{2,0} = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{Zr}{2a_0} e^{-Zr/2a_0}$$

Klotytefunktioner

l	m	$\Upsilon_l^m(\theta,\varphi)$
0	0	$\Upsilon_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$\Upsilon_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$
1	± 1	$\Upsilon_1^{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$
2	0	$\Upsilon_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$
2	± 1	$\Upsilon_2^{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$
2	± 2	$\Upsilon_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$

Hamiltonoperator för flerelektronsystem

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 - \frac{Ze^2/4\pi\epsilon_0}{r_i} + \sum_{j>i}^{N}\frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{r_{ij}}\right)$$

$$\langle LM_L|l_1|LM_L\rangle = \frac{\langle l_1\cdot\boldsymbol{L}\rangle}{L(L+1)}\langle LM_L|\boldsymbol{L}|LM_L\rangle$$

LS-koppling

$$\text{Termer:}\quad \begin{cases} L = |l_1 - l_2|, ..., l_1 + l_2 \\ S = |s_1 - s_2|, ..., s_1 + s_2 \end{cases}$$

$$\text{Nivåer:}\quad J = |L - S|, ..., L + S$$

Zeemaneffekt

$$E_{ZE} = \begin{cases} g_J\mu_B BM_J & \text{(end. finstrktur)} \\ g_F\mu_B BM_F & \text{(svagt fält, hfs)} \\ g_J\mu_B BM_J + AM_IM_J & \text{(starkt fält, } \mu_B B > A\text{)} \end{cases}$$

Koppling mellan magnetiskt moment och rörelsemängdsmoment

$$g_S = 2$$

$$g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

$$g_F = g_J \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)}$$

$$\boldsymbol{\mu}_I = g_I \mu_N \boldsymbol{I}$$

Dopplerbredd

$$\frac{\Delta\omega_D}{\omega_0} = 2\sqrt{\ln 2}\frac{u}{c} \approx 1.7\frac{u}{c}$$

Mest sannolik hastighet

$$u = 2230\sqrt{\frac{T}{300M}} \quad \mathrm{m/s}$$

Dopplerskift

$$\delta = kv = \frac{\omega v}{c}$$

Naturlig bredd

$$\Delta\omega_N = \Gamma = A_{21} = 1\frac{1}{\tau}$$

$$\Delta f_N = \frac{\Delta\omega_N}{2\pi}$$

¡ Missing Translation ¿

$$H = -\boldsymbol{\mu}_I \cdot \boldsymbol{B}_e = A\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J}$$

För s-elektroner i vätelika system gäller

$$A = \frac{2}{3}\mu_0 g_S \mu_B g_I \mu_N \frac{Z^3}{\pi a_0^3 n^3}$$

Boltzmanfördelningen

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\Delta E/(kT)}$$

Integraler

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0 \infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Operatorer

$$\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$$

$$\boldsymbol{L} = -i\hbar\boldsymbol{r}\times\nabla$$

$$\boldsymbol{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V \qquad \text{(standard)}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

Dirac notation

$$< \boldsymbol{H} > = < \psi|\boldsymbol{H}|\psi > = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \boldsymbol{H}\psi\,dv$$

Kommutatorer

$$[A,B] = AB - BA$$
$$[A,B] = -[B,A]$$
$$[A,B+C] = [A,B] + [A,C]$$
$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$$

Shrödingerekvationen

$$\boldsymbol{H}\psi = E\psi \qquad \text{(tidsoberoende)}$$

$$\boldsymbol{H}\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \qquad \text{(tidsberoende)}$$

Konfiguration	$\prod n_i l_i^{\omega_i}$
Termer	L och $S(^{2S+1}L)$
Nivåer	J
Tillstånd(ZE-subnivåer)	M_J
¡ Missing Translation ¿	F

1	$\Delta J = 0, \pm 1$	$(J = 0 \not\leftrightarrow J' = 0)$	nivå
2	$\Delta M_J = 0, \pm 1$	$(M_J = 0 \not\leftrightarrow M_{j'} = 0$ om $\Delta J = 0)$	tillstånd
3	bryt paritet		configuration
4	$\Delta l = \pm 1$		
5	$\Delta L = 0, \pm 1$	$(L = 0 \not\leftrightarrow L' = 0)$	term
6	$\Delta S = 0$		term

$1, 2$ ersätts med liknande formler för F och M_F om F är ett gott kvanttal. $5, 6$ gäller bara om L och S är goda kvanttal.

	finstruktur - LS	hyperfinstruktur - IJ
växelverkan	$\beta \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$	$A \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J}$
moment	$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}$
egentillstånd	$\lvert LSJM_J \rangle$	$\lvert IJFM_F \rangle$
energi	$\beta/2(J(J+1) - L(L+1) - S(S+1))$	$A/2(F(F+1) - I(I+1) - J(J+1))$
intervall	$E_J - E_{J-1} = \beta J$	$E_F - E_{F-1} = AF$
	(om $E_{S-O} \ll E_{re}$)	(om $A \gg \Delta E_{kvadrupol}$)

Våglära och optik

Svängningar

Enkel harmonisk svängning beskrivs av differentialekvationen

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

som har realla lösningar på formen

$$y = A \sin(\omega t + \alpha)$$

Vinkelfrekvens

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Energi för elastisk pendel

$$W_{pot} = \frac{ky^2}{2}$$
$$W_{tot} = \frac{m}{2} A^2 \omega^2$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vinkelfrekvens

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Vågtal

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Vågekvationen

Fortskridande planvåg

$$s = s_o \sin[2\pi(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}) + \alpha]$$

Stående vågens ekvation

$$s = A \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\phi}{2}\right) \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \frac{\phi}{2}\right)$$

där ϕ är fasförskjutningen i origo. Nodavståndet är $\frac{\lambda}{2}$

Allmänna vågekvationen

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

Svängningsfrekvens

$$f_{\text{svängning}} = |f_1 - f_2|$$

Ljud och Dopplereffekten

Dopplereffekten

$$f_m = f_s \frac{v - v_m}{v - v_s}$$

Överljudshastighet

$$\sin\theta = \frac{v_{ljud}}{v_{[planar/[plan]]}} = \frac{1}{M\alpha}$$

Kompressibilitetskoefficienten

$$\kappa = -\frac{1}{\Delta P} \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Ljudtryck

$$p = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$p = \mp p_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Tryckamplitud

$$p_0 = \frac{2\pi s_0}{\kappa\lambda} = Z s_0 \omega$$

Akustisk impedans

$$Z = \rho v$$

Ljudhastighet (vätska och gas)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{c_p RT}{c_v M}}$$

Ljudhastighet (Sträng resp. stav)

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Intensitet hos ljud

$$I = \frac{Z}{2} s_0^2 \omega^2$$

$$I = \frac{p_0^2}{2Z}$$

Ljudintensitetsnivå

$$L_I = 10lg\frac{I}{I_0}$$

$$\text{med } I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12}\, W/m^2$$

Reflektans och transmittans för ljud

$$R \equiv \frac{I_r ef}{I_i n} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$$

$$T \equiv \frac{I_t r}{I_i n} = 1 - R$$

Övertoner (Strängar och öppna cylindrar)

$$f_m = m \cdot f_1 \quad m = 2, 3, 4, ...$$

Övertoner (halvslutna cylindrar)

$$f_m = (2m-1) \cdot f_1 \quad m = 2, 3, 4, ...$$

Ljus

DeBroglievåglängden

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Ljusets fart

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

Intensitet EM-våg

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E_0^2 \ , \quad B_z = \frac{E_y}{v}$$

Intensitet då två ljusvågor adderas

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} < \cos\delta >$$

där δ är fasförskjutningen mellan vågorna.

Brytningsindex

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

Brytningslagen (plan yta)

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Gränsvinkel totalreflektion

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Prisma

$$\sin\left(\frac{A+\delta}{2}\right) = n \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

Där A är prismats topvinkel och δ är avlänkningsvinkeln.

Fiberoptik, numerisk appertur

$$N.A. \equiv n_0 \sin \theta_m$$

$$N.A. = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Materialegenskaper för ljud och ljus

Materialegenskaper för ljud och ljus

Ljudhastighet vid 1 atm och 20 °C:

Järn	5950 m/s
Glas (typvärde)	5600 m/s
Koppar	4760 m/s
Bly	2160 m/s
Gummi	1550 m/s
Vatten	1461 m/s
Kvicksilver	1407 m/s
Metanol	1143 m/s
Eter	1032 m/s
Väte	1286 m/s
Helium	1008 m/s
Luft	343 m/s
Syre	326 m/s
Koldioxid	269 m/s

Akustisk impedans vid 1 atm och 20 °C:

Vätgas	111 $\mathrm{Ns/m^3}$
Luft	412 $\mathrm{Ns/m^3}$
Vatten	$1,46 \cdot 10^6$ $\mathrm{Ns/m^3}$
Gummi	$1,47 \cdot 10^6$ $\mathrm{Ns/m^3}$
Glycerin	$2,42 \cdot 10^6$ $\mathrm{Ns/m^3}$
Kvarts	$13,1 \cdot 10^6$ $\mathrm{Ns/m^3}$
Glas (typvärde)	$14 \cdot 10^6$ $\mathrm{Ns/m^3}$
	$17,3 \cdot 10^6$ $\mathrm{Ns/m^3}$
Kvicksilver	$19,1 \cdot 10^6$ $\mathrm{Ns/m^3}$
Koppar	$33,9 \cdot 10^6$ $\mathrm{Ns/m^3}$
Stål	$46,4$ $\mathrm{Ns/m^3}$
Volfram	$101 \cdot 10^6$ $\mathrm{Ns/m^3}$

Vakuumvåglängder och frekvenser för ljus:

Färg	Våglängd	Frekvens
Violett	400 – 440 nm	749 – 681 THz
Blått	440 – 480 nm	681 – 625 THz
Grönt	480 – 560 nm	625 – 535 THz
Gult	560 – 590 nm	535 – 508 THz
Orange	590 – 620 nm	508 – 484 THz
Rött	620 – 700 nm	484 – 428 THz

Geometrisk optik

Brytning i sfärisk yta

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Gauss formel (lins och spegel)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Lateralförstoring (lins och spegel)

$$M \equiv \frac{y_b}{y_a} \qquad M = -\frac{b}{a}$$

Brännvidd buktig spegel

$$f = -\frac{R}{2}$$

Brytningsstyrka (lins)

$$B \equiv \frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

Lins

Lins med brytningsindex n_1 i medium med brytningsindex n_2:

$$B \equiv \frac{1}{f} = \left[\frac{n_1}{n_2} - 1\right] \cdot \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}\right]$$

Bländartal

$$b_t \equiv \frac{f}{D}$$

Skärpedjup

$$s \approx \frac{a^2}{1000f} b_t$$

Luppens vinkelförstoring

$$G = \frac{d_0}{f} \text{ där,} \quad d_0 = 25\,\text{cm}$$

Mikroskopets vinkelförstoring

$$G = |M_{ob}| \cdot G_{ok} = \frac{L}{f_{ob}} \frac{d_0}{f_{ok}}$$

där tublängden $L = 16\,\text{cm}$

Kepler- och Galileikikarens vinkelförstoring

$$G = \left| \frac{f_{ob}}{f_{ok}} \right|$$

Brytning i en sfärisk yta

Positiv om: C ligger till höger om O
Positiv om: A ligger till vänster om O
Positiv om: B ligger till höger om O
Positiv om: F_A ligger till vänster om O
Positiv om: F_B ligger till höger om O
Avbildning med tunn lins i luft
Positiv om: linsen är konvex (samlar ljuset)
Positiv om: föremålet är till vänster om linsen
Positiv om: bilden är till höger om linsen
Positiv om: föremålet är ovanför den optiska axeln
Positiv om: bilden är ovanför den optiska axeln
Positiv om: avbildningen är rättvänd
Avbildning med en buktig spegel
Positiv om: C är till höger om O (konvex)
Positiv om: F är till vänster om O (konkav)
Positiv om: A ligger till vänster om O
Positiv om: B ligger till vänster om O
Positiv om: avbildningen är rättvänd

Brytningsindex för några material

Brytningsindex uppmätt med $\lambda = 589\,\mathrm{nm}$ vid 20 °C:

Vatten	$1,333$
Dietyleter	$1,353$
Etanol	$1,361$
Glycerin	$1,455$
Bensen	$1,501$
Kolsvavla	$1,628$
Is (0 °C)	$1,31$
NaCl	$1,544$
Polystyren	$1,59$
Kronglas (FK5)	$1,487$
Kronglas (BK7)	$1,517$
	$1,542$
Flintglas (F2)	$1,620$
Flintglas (SF10)	$1,728$
Flintglas (SFS1)	$1,922$
Kvarts	$1,458$
Plexiglas	$1,49 - 1,52$
Diamant	$2,417$

Diffraktion och interferens

Intensitet vid böjning

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \qquad \text{med} \qquad \beta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta$$

Böjningsmin för en spalt

$$b\sin\theta = m\lambda \qquad \text{där} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Böjningsmin för en rund öppning

$$D\sin\theta = k\lambda$$

$$\text{där} k = 1,22 \quad 2,23 \quad 3,24 \quad 4,25 \quad 5,25...$$

Rayleighs upplösningskriterium

Centraltopp för den ena punkten över första min för den andra

Interferens om böjning försummas

$$I = I_0 \left(\frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right) \qquad \text{där} \qquad \gamma = \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

Interferens ger huvudmax om

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad \text{där} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Visibilitet

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Gitter, transmission resp reflektion

$$d(\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1) = m\lambda$$
$$d(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = m\lambda$$

Max eller min vid interferens i tunna skikt

$$2n_2 d \cos\alpha_2 = m\lambda \qquad \text{där} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Finess i Fabry-Perot interferometer

$$F = \frac{\Delta f}{\delta f} \qquad \text{där} \qquad \Delta f = \frac{c}{2d}$$

Airy funktionen

$$T = \frac{1}{1 + \left[\frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \right] \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Fresneldiffraction

Fresnel-Kirchhoff

$$E_p = \frac{-ik}{2\pi} E_s e^{-i\omega t} \iint_{Hinder} F(\theta) \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \, dA$$

Skevhetsfaktorn

$$F(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$

Radien på Fresnelzoner

$$R_n \approx \sqrt{nL\lambda} \quad \text{där} \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Polarisation

Malus lag

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

Fasskillnad i dubbelbrytande material

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d|n_e - n_o|$$

Reflektans vid normalt infall

$$R \equiv \frac{I_{ref}}{I_{in}} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$$

Brewstervinkel i luft

$$\theta_{luft} = \arctan n$$

Wiens förskjutningslag

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,898 \cdot 10^3 \, \mu m \cdot K$$

Termodynamik

Termodynamik

Värmeutvidgning

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T, \quad \frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta T, \quad \beta = 3\alpha$$

Värme

$$Q = mc\Delta T, \quad l_s = \frac{Q_s}{m}, \quad l_{\text{å}} = \frac{Q_{\text{å}}}{m}$$

Vätsketryck

$$p_{tot} = p_{\text{vätska}} + p_{\text{luft}} = \rho g h + p_{\text{luft}}$$

Ideala gaslagen

$$pV = NkT \quad \text{eller} \quad pV = nRT$$

$$\text{där} \quad n = \frac{m_{tot}}{M} = \frac{N}{N_A} \quad \text{och} \quad R = kN_A$$

Gasdensitet och partikeldensitet

$$\rho = \frac{m_{tot}}{V} = \frac{pM}{RT}, \quad n_o = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT}$$

Barometriska höjdformeln

$$p = p_0 e^{-\rho_0 g h / p_0}, \quad h = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p_0}{p}$$

Relativ luftfuktighet

$$R_{LF} = \frac{p_{\text{vatten}}}{p_{\text{mättnad}}}$$

van der Waals ekvation

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Kritisk punkt

$$V_k = 3nb, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}$$

Molekylradie

$$r = \left(\frac{3b}{16\pi N_A}\right)^{1/3}$$

Ångtryckskurva

$$p = Ae^{-Ml_{\text{å}}/(RT)}$$

Reynolds tal

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad Re < 2300 \text{ laminär}$$

Volymflöde

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Bernoullis ekvation

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g y_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g y_2$$

Poiseuilles lag

$$\Phi = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{L}$$

Tryck (mikroskopiskt)

$$p = \frac{2}{3} n_o \frac{m_{\text{en}}}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n_o \langle W_{\text{kin}} \rangle_{\text{en}}$$

Temperatur (mikroskopiskt)

$$\langle W_{\text{kin}} \rangle_{\text{en}} = \frac{3}{2} kT$$

Inre energi (ändring)

$$\Delta U = \frac{f}{2} N k \Delta T = \frac{f}{2} n R \Delta T$$

Första huvudsatsen

$$Q = \Delta U + W \quad \text{med} \quad W = \int_1^2 p dV$$

Isokor

$$W \equiv 0$$

Isobar

$$W = p (V_2 - V_1)$$

Isoterm

$$W = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Adiabat

$$W = -\Delta U$$

Molar värmekapacitet

$$c_V = \frac{f}{2} R, \quad c_p = c_V + R$$

Adiabat(Poissons ekvationer)

$$T_1 V_1^{(\gamma-1)} = T_2 V_2^{(\gamma-1)}$$
$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$$

Kvoten

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{2}{f}$$

Kretsprocess

$$Q_{\text{netto}} = W_{\text{netto}} = \oint p dV$$

Verkningsgrad

$$\eta = \frac{W_{\text{netto}}}{Q_{\text{in}}} = \frac{Q_{\text{in}} - |Q_{\text{ut}}|}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{ut}}|}{Q_{\text{in}}}$$

Ideal verkningsgrad

$$\eta = \frac{T_{\text{varm}} - T_{\text{kall}}}{T_{\text{varm}}} = 1 - \frac{T_{\text{kall}}}{T_{\text{varm}}}$$

Köldfaktor (def. och idealt)

$$K_f \equiv \frac{Q_{\text{in}}}{|W_{\text{netto}}|}, \quad K_f = \frac{T_{\text{kall}}}{T_{\text{varm}} - T_{\text{kall}}}$$

Värmefaktor (def. och idealt)

$$V_f \equiv \frac{Q_{\text{ut}}}{|W_{\text{netto}}|}, \quad V_f = \frac{T_{\text{varm}}}{T_{\text{varm}} - T_{\text{kall}}}$$

Gaussfördelning

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{m_{\text{en}}}{2\pi kT}} e^{-m_{\text{en}} v_z^2/(2kT)}$$

Maxwell–Boltzmannfördelning

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m_{\text{en}}}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m_{\text{en}} v^2/(2kT)}$$

Medelvärden

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{\text{en}}}}, \quad \langle v \rangle = 2\langle |v_x| \rangle$$

$$\langle W_{\text{kin}} \rangle = \left\langle \frac{m_{\text{en}} v^2}{2} \right\rangle = \frac{m_{\text{en}}}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

Stöttal (antal per sekund och kvadratmeter)

$$n^* = \frac{n_o}{4} \langle v \rangle$$

Medelfriväg

$$l = \frac{1}{n_o \pi d^2 \sqrt{2}}$$

Värmeledning (allmänt och stav)

$$P = -\lambda A \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \quad P = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Värmeövergång

$$P = \alpha A \Delta T$$

Strålning

$$P_{\text{ideal}} = \sigma A T^4, \quad P_{\text{verklig}} = e P_{\text{ideal}}$$

Tabeller

Mättnads-tryck för vatten

$t/°C$	Vatten/kPa
-30	0.0381
-20	0.103
-15	0.165
-10	0.260
-5	0.401
0	0.610
5	0.872
10	1.23
15	1.70
20	2.34
25	3.17
30	4.24
35	5.64
40	7.37
50	12.3
60	19.9
70	31.2
80	47.3
90	70.1
100	101.3
110	143.2
120	198.4
130	270.0

Längdutvidgningskoefficient vid 20°C och normalt lufttryck.

Ämne	$\alpha/(10^{-}6\mathrm{K}^{-}1)$	Ämne	$\alpha/(10^{-}6\mathrm{K}^{-}1)$
Aluminium	23	Glas (typvärde)	6.0
Silver	19	Volfram	4.3
Mässing (Cu + Zn)	19	Marmor (typvärde)	2.5
Koppar	17	Invar (Fe + Ni)	2.0
Järn	12	Grafit	2.0
Stål	11	Diamant	1.2
Platina	9.0	Kvarts	0.4

Konstanter

Konstanter

Konstanter

Namn	Variabel	Värde	Enhet
Ljushastigheten i vakuum	c	$299\,792\,458$	m/s
Planks konstant	h	$6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$	Js
Planks konstant	h	$4.135\,667\,87 \cdot 10^{-15}$	eVs
Planks konstant	$\hbar$	$1.054\,573 \cdot 10^{-34}$	Js
Planks konstant	$\hbar$	$0.658\,212 \cdot 10^{-15}$	eVs
Elementarladdningen	e	$1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$	C
Bohrradien	a_0	$5.291\,772\,109\,03 \cdot 10^{-11}$	m
Elektronmassan	m_e	$9.109\,383\,7015 \cdot 10^{-31}$	kg
Elektronmassan	m_e	$0.510\,998\,954$	MeV/c^2
Protonmassan	m_p	$1.672\,621\,923\,69 \cdot 10^{-27}$	kg
Protonmassan	m_p	$938.272\,096$	MeV/c^2
Protonmassan	m_p	$1836.152\,673\,43$	m_e
Neutronmassan	m_n	$1.674\,927\,498\,04 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronmassan	m_n	$939.565\,428$	MeV/c^2
Neutronmassan	m_n	$1838.683\,661\,73$	m_e
Boltzmanns konstant	k	$1.380\,649 \cdot 10^{-23}$	J/K
Boltzmanns konstant	k	$8.617\,333\,6333 \cdot 10^{-5}$	eV/K
Avogadros konstant	N_A	$6.022\,140\,76 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Rydbergs konstant	R_y	$\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}$	
Rydbergs konstant	R_y	13.6057	eV
Rydbergs konstant	R_y	$109\,737.32$	cm^{-1}
Allmänna gaskonstanten	R	$8.314\,462\,618$	J/(mol $\cdot$ K)
Finstrukturkonstanten	α	$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.036}$	
dielektriska konstanten för vakuum	ε_0	$0.885\,419 \cdot 10^{-11}$	As/Vm
permeabilitet för vakuum	μ_0	$1.256\,637\,062\,12 \cdot 10^{-6}$	Vs/Am
permeabilitet för vakuum	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Bohr magnetonen	μ_B	$\frac{e\hbar}{2m} = 9.274\,010\,0783 \cdot 10^{-24}$	Am^2

Prefix

Prefix

SI-prefix

SI-prefix	Symbol	Decimaltal
Yotta	Y	$1e24$
Zetta	Z	$1e21$
Exa	E	$1e18$
Peta	P	$1e15$
Tera	T	$1e12$
Giga	G	$1e9$
Mega	M	$1e6$
Kilo	k	$1e3$
Hekto	h	$1e2$
Deka	da	$1e1$
Deci	d	$1e-1$
Centi	c	$1e-2$
Milli	m	$1e-3$
Mikro	µ	$1e-6$
Nano	n	$1e-9$
Piko	p	$1e-12$
Femto	f	$1e-15$
Atto	a	$1e-18$
Zepto	z	$1e-21$
Yokto	y	$1e-24$

Periodiska Systemet

Enhetsomvandling