

# Elektromagnetisk fältteori

## elstatik

### Coulombs law

$F$  på en punktladdning  $q_1$  i punkten  $\mathbf{r}_1$  orsakad av en punktladdning  $q_2$  i punkten  $\mathbf{r}_2$

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |r_1 - r_2|^2} \frac{(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|}$$

### Elektrisk fältstyrka

Från en punktladdning  $q$  i  $\mathbf{r}'$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R$$

Från laddningsfördelning

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R dq(\mathbf{r}'),$$

$$dq(\mathbf{r}') = \begin{cases} \rho_{tot}(\mathbf{r}') dv' = \rho(\mathbf{r}') + \rho_p(\mathbf{r}') dv' \\ \rho_{tot,s}(\mathbf{r}') dS' = \rho_s(\mathbf{r}') + \rho_{p,s}(\mathbf{r}') dS' \\ \rho_l(\mathbf{r}') dl' \end{cases}$$

Från punktdipol  $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos(\theta)\mathbf{e}_r + \sin(\theta)\mathbf{e}_\theta)$$

$\rho_l$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r_c} \mathbf{e}_{r_c}$$

Från linjedipol  $\mathbf{p}_l = p_l \mathbf{e}_x$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0 r_c^2} (\cos(\varphi)\mathbf{e}_{r_c} + \sin(\varphi)\mathbf{e}_\varphi)$$

### Elektrisk potential

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Från punktladdning  $q$  i  $\mathbf{r}'$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Från laddningsfördelning

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} dq(\mathbf{r}')$$

Från punktdipol  $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Från linjeladdning  $\rho_l$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{r_c}\right)$$

Från linjedipol  $\mathbf{p}_l = p_l \mathbf{e}_x$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\varphi)}{r_c}$$

### Elektrisk flödestäthet

Där  $\mathbf{D}$  är definierad av  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

Gauss lag, där  $\mathbf{e}_n$  är den från volymen utåtriktade enhetsnormalvektorn]:

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_n dS = \int \rho dv$$

[[Connection between  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  och  $\mathbf{D}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} & (\text{gäller allmänt}) \\ \mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \end{cases}$$

### Polarisationsladdning

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{rymdladdningstäthet}$$

$$\rho_{p,s} = \mathbf{e}_{n1} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \quad \text{ytladdningstäthet}$$

där enhetsnormalvektorn  $\mathbf{e}_{n1}$  är riktad från område 1 till område 2.

### Randvillkor

$$\begin{cases} E_t \text{ kontinuerlig} \\ \rho_s = \mathbf{e}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \end{cases}$$

där  $\rho_s$  är fri ytladdningstäthet och  $\mathbf{e}_{n2}$  är riktad från område 2 mot område 1.

### Elektrostatisk energi

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho V \, dv$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv$$

### Maxwells spänning

$$|\mathbf{T}| = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad \mathbf{E} \text{ är en bisektris till } \mathbf{e}_n \text{ och } \mathbf{T}$$

### Vridmoment på elektrisk dipol

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

### Likström

#### Strömtäthet

$$I = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_n \, dS$$

#### Konservationsekvationen

$$\Delta \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\oint \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_n \, dS = -\frac{dQ}{dt}$$

#### Konduktivitet

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

#### Effekt

$$P = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

#### Randvillkor

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{n2} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = 0 & (\text{ingen likström}) \\ \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \end{cases}$$

### Tidskonstant

$$RC = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\sigma}$$

### Analogi elstatik-likström

|                         |                 |
|-------------------------|-----------------|
| $\mathbf{E}, V$         | $\mathbf{E}, V$ |
| $\mathbf{D}$            | $\mathbf{J}$    |
| $\epsilon_r \epsilon_0$ | $\sigma$        |
| $Q$                     | $I$             |
| $C$                     | $G$             |

### Magnetostatik

#### Magnetisk flödestäthet

Från punktdipol  $\mathbf{m} = m \mathbf{e}_z$ :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$

Från strömtäthet  $\mathbf{J}_{tot}(\mathbf{r}')$ :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{tot}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_R}{R^2} \, dv'$$

där  $\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_m$ . Från strömbana:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \, d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

Från cirkulär trådslinga:

$$\mathbf{B}(x=0, y=0, z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$$

Från spole:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \frac{\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)}{2} \mathbf{e}_z$$

Från lång rak strömbana:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c} \mathbf{e}_\varphi$$

## Vektorpotential

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Från strömtäthet  $\mathbf{J}_{tot}(\mathbf{r}')$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{tot}(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

Från strömbana:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dl'}{R}$$

Från lång rak strömbana:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \mathbf{e}_z$$

Från punktdipol :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

## Magnetiskt flöde

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_n dS = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

## Sammanlänkat flöde

$$\Lambda = N\Phi$$

## Självinduktans och ömsesidig induktans

$$\Lambda_1 = L_1 I_1 + M I_2$$

$$\Lambda_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

## Magnetisk Fältstyrka

Amperes lag:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_n dS = I_{\text{innanför}}$$

Samband mellan magnetisering  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  och  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) & (\text{gäller allmänt}) \\ \mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

## Ekvivalent strömtäthet

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad \text{volymströmtäthet}$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad \text{ytströmtäthet}$$

## Randvillkor

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{n2} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \\ \mathbf{B}_n \text{ Kontinuerlig} \end{cases}$$

## Skalärpotential

Från en magnetisk dipol  $\mathbf{m}$ :

$$V_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}$$

## Magnetisk pöltäthet

$$\begin{cases} \rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} & \text{volympöltäthet} \\ \rho_{m,s} = \mathbf{e}_{n1} \cdot (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) & \text{ytpöltäthet} \end{cases}$$

## Magnetiska kraftlagen

$$d\mathbf{F}_m = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

## Magnetiskt moment för strömslinga

$$\mathbf{m} = \int I \mathbf{e}_n dS$$

## Vridmoment på magnetiskt moment

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

## Maxwells spänning

$$|\mathbf{T}| = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad \mathbf{B} \text{ är bisektris till } \mathbf{e}_n \text{ och } \mathbf{T}$$

## Magnetisk energi

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij} I_i I_j$$

Två spolar:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

### Reluktans

$$R = \frac{1}{\mu_r \mu_0 S}$$

### Elektromagnetiska Fält

#### Inducerad emk

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Lambda}{dt} \quad (\text{spole med flera varv})$$

#### Maxwells ekvationer

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

#### Konservationsekvationen

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

#### Potentialer

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{ret}}{R} dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{ret}}{R} dv'$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

### Magnetisk flödestäthet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{ret} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int \frac{\mathbf{J}'_{ret} \times \mathbf{e}_R}{R} dv'$$

#### Trådformig antenn

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i(z, t - R/c) d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{e}_R}{R^2} + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int \frac{i(z, t - R/c) d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{e}_R}{R}$$

#### Svängande elektrisk dipol

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}'(t - R/c) \times \mathbf{e}_R}{R^2} + \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\mathbf{p}''(t - R/c) \times \mathbf{e}_R}{R}$$

#### Svängande magnetisk dipol

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}'(t - R/c) \times \mathbf{e}_R}{R^2} - \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\mathbf{m}''(t - R/c) \times \mathbf{e}_R}{R}$$

#### Pointings vektor

$$\mathbf{P}_S(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

### Tidsharmoniska fält

#### Plan, sinusformad våg

$$\mathbf{E} = \hat{E} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi) \mathbf{e}_E \quad \text{ögonblicksvärde}$$

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_E \quad \text{complex värde}$$

$$E_0 = \hat{E} e^{j\phi} \quad \text{topvärdesskala}$$

$$E_0 = \frac{\hat{E}}{\sqrt{2}} e^{j\phi} \quad \text{effektivvärdesskala}$$

#### Utbredningshastighet

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} \quad v = \frac{\omega}{k} \quad k = |\mathbf{k}|$$

#### Vågimpedans, oledande rymd

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

### Regeln om högersystem

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_E \times \mathbf{e}_H \quad E = \eta H \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_E \times \mathbf{e}_B \quad E = vB$$

### Missing Translation $\mathcal{L}$

$$\mathbf{E} = E_0 e^{\gamma z} \mathbf{e}_x$$

### Komplexa utbredningskonstanten

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_r\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon_r\epsilon_0)} \quad \gamma = \alpha j\beta$$

### Vågimpedans, rymd med given konduktivitet

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_r\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_r\epsilon_0}}$$

### Inträngningsdjup

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_r\mu_0\sigma}}$$

### Några derivator

#### Några derivator

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$