

Fourieranalys inledning

Fouriersumma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\omega t)$$

Fourierkoefficienter

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(m\omega t) dt$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(m\omega t) dt$$

Omskrivning med hjälp av Eulers formel

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m e^{-im\omega t}$$

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{im\omega t} dt$$

För icke-periodiska funktioner gäller

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Fouriers integralsats

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 k$$

$$A(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r$$

Periodiska randvillkor

Om funktionen $f(\mathbf{r})$ är sådan att

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + L\mathbf{R})$$

[For some positive integer L and lattice vector $\mathbf{R}$.
Then/Får något positivt heltal L och gittervektor $\mathbf{R}$.
Då håller att]]

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}=\frac{\mathbf{G}}{L}} c_{\mathbf{k}} \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$c_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_V f(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r$$

Där $\mathbf{G}$ är den reciproka gittervektorn och $V = L^3 |\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)| = L^3 V_a$. Funktionerna $\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ är ett fullständigt orthonormalsystem i V . Om volymen V är stor, kan summan ersättas med en integral:

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k$$

Diracs deltafunktion

$$\int_A^B f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{om } A < x_0 < B \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Om $f(x)$ är en "snäll" funktion.

$$\delta(f(x)) = \sum_{\forall i; f(x_i)=0, f'(x_i) \neq 0} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$$

Kroneckers delta

$$\delta_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\phi(n-m)} d\phi = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$